

Ways of thinking siswa dalam menyelesaikan masalah pola bilangan non rutin: Suatu penelitian fenomenologi hermeneutik

Aiyub*

Department of Mathematics Education, Universitas Islam Negeri Ar-Raniry, Banda Aceh, Indonesia, 23111

*Corresponding Author: aiyub@ar-raniry.ac.id

Abstract. This study was conducted with the aim of investigating and exploring students' ways of thinking (WoT) in solving non-routine number pattern problems. This study used a qualitative method with a hermeneutic phenomenological approach with grade 8 students at a junior high school in Banda Aceh. To achieve the research objectives, data collection was carried out using a written test instrument with a number pattern on a 4-digit palindrome, structured documentation, and clinical interviews. The results of the study show that students' WoT in solving non-routine number pattern problems is that there are four approaches used in solving non-routine problems, namely: first, determining the special case; second, determining the pattern; third, using a mathematical model; and fourth, using a similar problem. The subject of critical reflection uses the three WoT's above except for using similar problems. The subject of explicit reflection uses the three approaches above except for using a mathematical model. While Subjects who cannot solve the problem only use the strategy of identifying special cases. Another finding is that the subject of critical reflection tends to use different strategies from those given by the teacher, is unique, and gives reasons for algebraic forms. In contrast, explicit reflection subjects tend to be less flexible in using strategies and tend to use inductive or arithmetic reasons. To support students in their ability to pattern and think algebraically, teachers must accustom students to solving non-routine mathematical problems in various contexts of learning by using number patterns.

Historis Artikel:

Diterima: 30 Juni 2023

Direvisi: 25 Juli 2023

Disetujui: 07 Agustus 2023

Keywords: Ways of thinking; solution to problem; number patterns; palindrome

Sitasi: Aiyub, A. (2023). Ways of thinking siswa dalam menyelesaikan masalah pola bilangan non rutin: Suatu penelitian fenomenologi hermeneutik. *Journal of Didactic Mathematics*, 4(2), 65-76. Doi: 10.34007/jdm.v4i2.1851

PENDAHULUAN

Belajar matematika dewasa ini bukan hanya untuk menguasai materi matematika, tapi juga harus dapat mengembangkan pola pikir siswa untuk dapat menyelesaikan masalah matematika dan masalah dalam kehidupan yang lebih luas. Hal ini sesuai dengan yang dikemukakan Harel (2008) bahwa matematika terdiri atas dua subhimpunan yang saling melengkapi yaitu pertama adalah himpunan semua *Ways of Understanding* (selanjutnya disingkat sebagai WoU) yaitu koleksi atau struktur yang terdiri atas aksioma, definisi, teorema, bukti, masalah, dan solusi; dan kedua terdiri atas semua *Ways of Thinking* (selanjutnya disingkat sebagai WoT) yang merupakan karakteristik aksi mental yang mana produk dari subhimpunan pertama. Dimana aksi mental yang dimaksud merupakan elemen dasar kognisi manusia yang tidak hanya dalam sains atau matematika, namun ada di setiap kehidupan kita.

Beberapa aksi mental siswa dalam belajar matematika seperti menafsirkan, menduga, menyimpulkan, membuktikan, menjelaskan, menata, menggeneralisasi, menerapkan, memprediksi, mengklasifikasi, mencari, memecahkan masalah, dan sebagainya (Suryadi, 2019a). Harel (2008) mengatakan WoT merupakan karakteristik dari aksi mental meliputi bagaimana seseorang memecahkan masalah, bagaimana menafsirkan suatu simbol matematika, bagaimana membuktikan suatu pernyataan, apakah fleksibel dan bisa menghubungkan ke beberapa konsep yang lain atau infleksibel dan terpaku pada satu konsep, dan sebagainya. Sedangkan WoU

merupakan produk dari aksi mental yang meliputi solusi dari suatu masalah, bukti dari suatu pernyataan, interpretasi siswa terhadap suatu simbol, suatu masalah, atau suatu konsep.

Harel (2008) mengatakan bahwa tindakan mental manusia dapat dipelajari dengan mengamati pernyataan dan tindakannya. Pernyataan dan tindakan seseorang dapat menandakan produk kognitif dari tindakan mental yang dilakukan oleh orang tersebut. Produk semacam itu adalah cara pemahaman orang yang terkait dengan tindakan mental itu. Pengamatan berulang terhadap cara pemahaman seseorang yang terkait dengan tindakan mental yang diberikan dapat mengungkapkan karakteristik kognitif tertentu dari tindakan tersebut. Karakteristik seperti itu disebut sebagai cara berpikir yang terkait dengan tindakan itu. Suryadi (2019a) menggambarkan hubungan antara aksi mental, WoU, dan WoT sebagai model *Triadic Aksi Mental-WoT-WoU*. Dimana aksi mental yang dilakukan siswa akan mewarnai WoT, WoT yang terbentuk pada siswa akan memfasilitasi proses terbentuknya WoU, selanjutnya WoU yang terbentuk pada siswa akan memperbaiki aksi mental yang dapat dilakukan siswa berikutnya.

Lebih lanjut, perbedaan antara WoU dan WoT dijelaskan oleh Harel (2008) melalui tiga aksi mental yaitu *interpreting act* (menafsirkan), *problem solving act* (memecahkan masalah), dan *proving act* (membuktikan). Ditinjau dari tindakan menafsirkan (*interpreting act*), WoT meliputi bagaimana siswa menafsirkan, apakah fleksibel (multi interpretasi dan dapat menghubungkan dengan konsep lain) atau infleksibel (terpaku pada suatu konsep), apakah referensial (dapat dihubungkan dengan kenyataan) atau nonreferensial (tidak dapat dihubungkan dengan kenyataan), atau apakah siswa dapat melakukan manipulasi aljabar. Sedangkan WoU meliputi suatu interpretasi atau arti yang diberikan siswa terhadap suatu masalah, konsep, ataupun simbol.

Alasan mengapa WoT siswa begitu menarik untuk diselidiki? Pembelajaran matematika kenyataannya berpikir matematis siswa tidak fokus pada kinerja tetapi pada preferensi individu. Pendekatan ini didasarkan pada teori WoT (Harel, 2008). Bagi Harel WoT adalah karakteristik kognitif dari tindakan mental. Karakteristik seperti itu selalu disimpulkan dari pengamatan cara pemahaman produk kognitif dari tindakan mental. Ini bukan kemampuan, melainkan cara yang lebih disukai atau lebih akrab untuk menggunakan kemampuan yang dimiliki seseorang. Sebuah WoT mengacu pada bagaimana seseorang suka melakukan sesuatu. Dalam pengertian ini, WoT tidak dikaitkan dengan seberapa baik sesuatu dilakukan, tetapi cara seseorang menyukai sesuatu untuk dilakukan. Dua kategori pengetahuan matematika yaitu WoT dan WoU sangat diperlukan dalam konteks kajian pembelajaran matematika (Suryadi, 2019a). Ditinjau dari tindakan pemecahan masalah (*problem solving act*) maka WoT yang bersesuaian adalah bagaimana siswa memilih pendekatan pemecahan masalah yang dimulai dari bagaimana menyederhanakan masalah, lalu menemukan kemungkinan yang dapat menjadi suatu solusi masalah, menemukan representasi yang cocok untuk masalah tersebut, atau bahkan menggunakan kata kunci dari masalah. Sedangkan WoU yang bersesuaian adalah solusi dari suatu masalah tersebut (Harel 2008; Suryadi, 2019a).

Pendekatan atau strategi (WoT) yang digunakan siswa dalam menyelesaikan suatu masalah, erat kaitannya dengan proses *reflective inquiry* yaitu proses berpikir yang melibatkan pengalaman terdahulu dalam memahami asumsi dan implikasi suatu masalah. Dimana proses *reflective inquiry* ini dapat terjadi pada tiga level yaitu *implicit reflection*, *explicit reflection*, dan *critical reflection* (Suryadi, 2019b). Suryadi menjelaskan, ketika seseorang berhadapan dengan suatu masalah, kemudian berpikir dan merujuk pada pengalaman, pengetahuan sendiri sampai ditemukan solusi dari masalah tersebut, maka proses tersebut merupakan *implicit reflection*, suatu proses *reflection* level pertama. Selanjut seringkali seseorang dihadapkan pada suatu masalah yang tidak bisa diselesaikan dengan merujuk pada pengalaman dan pengetahuan sendiri. Pada situasi seperti ini, seseorang biasanya mencari informasi dari luar dirinya, dengan mengkaji pengetahuan eksplisit dari literatur juga berdiskusi dengan beberapa pihak lain di lingkungannya sampai diperoleh jawaban atau solusi yang dicari. Proses ini dikenal sebagai *explicit reflection*, yang merupakan proses reflektif level dua. Adakalanya proses pencarian solusi atas masalah yang dihadapi menemui jalan buntu. Situasi seperti ini biasanya digambarkan sebagai “situasi kritis”, seperti keadaan sebuah kurva antara naik dan turun, atau antara naik dan lebih naik lagi. Pada situasi seperti itulah seseorang melakukan *critical reflection*,

suatu proses *reflective* yang memicu daya kreatif manusia sampai ditemukan jawaban baru, yang tidak didasarkan atas pengetahuan eksplisit yang telah ada sebelumnya.

Berdasarkan permasalahan di atas penelitian ini akan mengkaji WoT siswa dalam menyelesaikan masalah pola bilangan non rutin berdasarkan proses *reflective inquiry*. Adapun pertanyaan dalam penelitian ini adalah bagaimanakah WoT siswa dalam menyelesaikan masalah pola bilangan non rutin?

METODE

Jenis penelitian ini adalah penelitian kualitatif dengan menggunakan pendekatan *Interpretative Phenomenological Analysis* (IPA) yang bertujuan untuk memaknai dan menginterpretasi suatu fenomena berdasarkan pengalaman manusia (Eatough & Smith, 2017). Di mana IPA berhubungan erat dengan fenomenologi dan hermeneutik yang berfokus pada pengalaman seseorang. Sebagaimana dikatakan Ricoeur (1986) perlu memadukan kajian pengalaman dan kajian makna dan pemaknaan dengan pengalaman tersebut karena saling melengkapi. Hal ini dipilih untuk mengungkapkan ragam makna dan mendeskripsikan proses berpikir matematis siswa dalam menyelesaikan masalah matematis non rutin materi pola bilangan. Adapun kerangka kajian penelitian ini berdasarkan *Theory of Situation Didactical of Mathematics* (Brousseau, 2002).

Penelitian ini dilaksanakan pada semester genap tahun ajaran 2021/2022 dengan melibatkan sebanyak 30 siswa kelas 8 pada salah satu SMP di Banda Aceh. Penelitian ini menggunakan dua instrumen utama untuk mengumpulkan data yang dibutuhkan seperti soal tes tertulis masalah pola bilangan non rutin dan pedoman wawancara klinis semi terstruktur untuk menggali WoT dalam menyelesaikan masalah pola bilangan. Adapun masalah pola bilangan yang diberikan kepada siswa dalam penelitian yaitu masalah palindrom 4 angka seperti berikut ini:

“Angka seperti 1331 disebut palindrom karena dapat dibaca sama baik dari depan maupun dari belakang. Seorang teman anda menyatakan bahwa semua palindrom 4 angka habis dibagi 11. Benarkah pernyataan teman anda tersebut?”

Teknik analisis data yang digunakan dalam penelitian ini berdasarkan tahapan yang dikembangkan oleh Creswell (2007) yaitu *data managing, reading-memoing, describing-clasifying-interpreting, dan representing-visualizing*. *Data managing*, yaitu mengatur data ke dalam file komputer untuk dianalisis, mentranskrip data rekaman dan wawancara siswa, dan mengetik catatan observasi. *Reading-memoing* yaitu membaca dan memaknai data yang terkumpul serta memberi mencatat atau memo di pinggir catatan lapangan atau transkrip atau di bawah foto untuk membantu dalam proses awal eksplorasi data. *Describing-clasifying-interpreting*, yaitu membentuk kode atau kategori mewakili inti dari analisis data. Peneliti membangun deskripsi rinci, mengembangkan tema atau dimensi, dan memberikan interpretasi berdasarkan pandangan mereka sendiri atau pandangan perspektif dalam literatur. *Representing-visualizing*, yaitu merepresentasikan hasil analisis data dalam bentuk teks, tabel, atau gambar.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dari analisis hasil tes dan wawancara siswa dalam menyelesaikan masalah pola bilangan non rutin dapat diidentifikasi empat WoT siswa yaitu: (i) menentukan apa yang diketahui, yang ditanyakan, dan informasi yang diperlukan; (ii) mengidentifikasi pola atau aturan; (iii) menggunakan model matematika, dan; iv) menyelesaikan dengan menggunakan masalah yang mirip. Dimana ke empat WoT siswa tersebut dapat dikelompokkan ke dalam tiga kategori siswa yaitu pertama kelompok siswa yang dapat menyelesaikan masalah secara unik (*critical Reflection*); kedua kelompok siswa yang dapat menyelesaikan masalah dengan bantuan *scaffolding (explicit reflection)*, dan; ketiga kelompok siswa yang tidak dapat menyelesaikan masalah yang diberikan. Pengkategorian ini dilakukan karena WoT siswa sangat dipengaruhi oleh proses *reflective inquiry* yang dapat dilakukan siswa dalam menyelesaikan masalah non rutin pola bilangan (Aiyub et al., 2022; Aiyub, 2023;

Suryadi, 2019b). Berikut paparan data ke empat WoT siswa dalam menyelesaikan masalah matematis palindrom 4 yang diberikan di mana S1 (subjek pertama) mewakili siswa kategori kelompok *critical reflection*; S2 (subjek kedua) mewakili siswa kategori kelompok *explicit reflection*; dan S3 (Subjek tiga) mewakili siswa kelompok yang tidak dapat menyelesaikan masalah.

Mengidentifikasi kasus khusus dari yang masalah ditanyakan

Berdasarkan analisis hasil respon yang diberikan ketiga kategori siswa dalam menyelesaikan masalah pola bilangan non rutin memberikan respon dengan mengidentifikasi kasus khusus dari masalah yang diberikan. Ketiga kategori subjek penelitian memberikan contoh kasus khusus dari bilangan palindrom 4 angka untuk ditunjukkan habis dibagi 11. Mengidentifikasi kasus khusus merupakan salah satu strategi atau pendekatan yang disering digunakan siswa dalam menyelesaikan masalah (Herman, 2000; NCTM 2000; Polya, 1985). Berikut ini adalah respon yang diberikan subjek S1 dari kategori kelompok *critical reflection* dalam menyelesaikan masalah palindrom 4 angka dengan mengidentifikasi dua contoh kasus khusus palindrom 4 angka yaitu 1221 dan 2442 yang menunjukkan habis dibagi 11.

Handwritten student work showing the identification of special cases for palindromes divisible by 11. The student writes: "iya, karena dr beberapa bilangan palindrom yg dibagi dgn 11 maka bilangan tersebut habis (tdk berkoma)". Examples given are: $1221 : 11 = 111$ and $2442 : 11 = 222$. There are also some calculations for $5885 = 535$ and $6996 = 636$.

Gambar 1. WoT S1 dalam mengidentifikasi kasus khusus

Berdasarkan respon yang diberikan subjek S1 pada gambar 1 di atas menunjukkan subjek dapat memberikan kasus khusus dari palindrom 4 angka yang habis dibagi 11 dengan memberikan contoh palindrom 4 angka 1221 dan 2442. Selanjutnya subjek S1 mencoba melihat ke dua palindrom 4 angka yang dipilih apakah habis dibagi 11? Berdasarkan kasus khusus yang dipilih S1 menunjukkan kedua palindrom tersebut yang dipilih ternyata dapat dibagi 11. Dimana palindrom 1221 dibagi 11 hasilnya 111, dan palindrom 2442 dibagi 11 hasilnya 222.

Seperti halnya Subjek S1, Subjek S2 juga menggunakan strategi penyelesaian masalah palindrom ini dimulai dengan mengidentifikasi contoh khusus dari masalah palindrom 4 angka. Berikut respon S2 dalam mengidentifikasi kasus khusus dalam menyelesaikan masalah pola bilangan non rutin.

Handwritten student work showing examples of palindromes divisible by 11. The student writes: "Contoh : $1221 : 11 = 111$ ", " $: 2112 : 11 = 192$.", and " $: 4224 : 11 = 384$.". Below this, the student writes: "jika angka terakhir nya adalah '1' maka hasil bagi yang terakhir juga sudah pasti satu."

Gambar 2. WoT S2 dalam mengidentifikasi kasus khusus dalam menyelesaikan masalah

Berdasarkan respon yang diberikan S2 pada gambar 2 di atas menunjukkan subjek S2 mengidentifikasi kasus khusus dengan memilih tiga contoh palindrom 4 angka yaitu 1221, 2112,

4224. Selanjutnya subjek mencoba melihat ke empat palindrom 3 angka yang dipilih apakah habis dibagi 11? Berdasarkan kasus khusus yang dipilih subjek S2 menunjukkan ke tiga palindrom tersebut ternyata dapat dibagi 11.

Subjek S3 yang mewakili dari kelompok yang tidak dapat menyelesaikan masalah palindrom juga dapat mengidentifikasi kasus khusus dari palindrom 4 angka yang habis dibagi 11. Berikut ini respon subjek S3 saat mengidentifikasi kasus khusus untuk menyelesaikan masalah dengan mengidentifikasi kasus khusus dari palindrom 4 angka.

Benar, karena semua angka terbukti habis ketika di bagi 11.

Contoh:

$$\begin{array}{r} 11 \overline{)1221} = 111 \\ \underline{11} \\ 12 \\ \underline{11} \\ 11 \\ \underline{11} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \overline{)111} = 11 \\ \underline{11} \\ 0 \end{array}$$

Contoh: $3883 \div 11 = 353$

$$\begin{array}{r} 11 \overline{)3883} = 353 \\ \underline{33} \\ 58 \\ \underline{55} \\ 33 \\ \underline{33} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 353 \\ 11 \times \\ \underline{353} \\ 3883 \end{array}$$

Gambar 3. Respon S3 mengidentifikasi kasus khusus palindrom 4 angka yang habis dibagi 11

Berdasarkan respon yang diberikan S3 pada gambar 3 di atas menunjukkan subjek S3 dapat mengidentifikasi kasus khusus memilih dua contoh palindrom 4 angka yaitu 1221 dan 3883 dan menunjukkan bahwa kedua palindrom yang dipilih dapat dibagi atau habis dibagi 11.

Mengidentifikasi pola

Pendekatan atau strategi mengidentifikasi pola/aturan dari masalah palindrom 4 angka dapat digunakan oleh subjek S1 dan S2. Mengidentifikasi pola atau aturan merupakan salah satu strategi atau pendekatan yang disering digunakan siswa dalam menyelesaikan masalah non rutin (Herman, 2000; NCTM 2000; Polya, 1985). Subjek S1 dapat mengidentifikasi bahwa palindrom 4 angka mempunyai pola yaitu angka pertama sama dengan angka ke empat merupakan kelipatan dari 11. Selanjutnya angka ke dua sama dengan angka ke tiga juga merupakan kelipatan dari 11. Sehingga S1 berkesimpulan bahwa karena angka pertama dan ke empat kelipatan 11 dan angka kedua dan ketiga kelipatan 11, maka palindrom 4 angka habis dibagi 11.

karena bilangan palindrom seperti 1221 \rightarrow kelipatan 11

$$\begin{array}{r} 11 \\ 11 \\ 11 \\ 11 \\ 11 \end{array}$$

3883 = kelipatan 11 juga

\rightarrow jika bilangan tersebut di gabung hasilnya kelipatan 11

Kita hanya perlu melihat angka awal = angka akhir = kelipatan 11

angka kedua = angka ketiga = kelipatan 11.

Gambar 4. Pendekatan mengidentifikasi pola S1 dalam menyelesaikan masalah pola bilangan

Berdasarkan respon yang dicantumkan pada gambar di atas menunjukkan bahwa subjek S1 menyelesaikan masalah pola bilangan dengan menggunakan pola atau aturan yang dapat diidentifikasi pada palindrom 4 angka. Subjek S1 mengatakan bahwa "angka pertama sama dengan angka ke empat dan merupakan kelipatan 11, sedangkan angka kedua sama dengan ke tiga dan

merupakan kelipatan 11” Berikut kutipan wawancara dengan S1 untuk menggali informasi tentang strategi penyelesaian masalah dengan mengidentifikasi pola atau aturan yang digunakan pada masalah pola bilangan.

- P : “Untuk masalah yang ke dua ini, S1 menggunakan pola apa ini?”
 S1 : “... Pada masalah ini, saya lihat angka pertama dan ke empat sama pak, berarti ini kelipatan dari 11. Begitu juga untuk angka kedua sama dengan angka ke tiga, berarti juga kelipatan 11”
 P : “...Lalu apa gunanya pola ini untuk menunjukkan palindrom habis dibagi 11?”
 S1 : “...Iya karena angka-angka bisa dilihat kelipatan dari 11, sehingga palindrom 4 angka dapat dibagi 11 pak!”

Sedangkan S2 dapat menggunakan pola yang berlaku pada masalah pola bilangan. Ia dapat merumuskan pola dari suatu palindrom 4 angka dengan bantuan *scaffolding* dari peneliti. Berikut respon subjek S2 dalam menggunakan pola untuk menyelesaikan masalah pola bilangan setelah diberikan *scaffolding*.

The image shows handwritten mathematical work on lined paper. At the top, there are two subtraction problems: $2112 - 2002 = 110$ and $1221 - 1111 = 110$. To the right of these are two equations: $2 - 1 + 1 - 2 = 0$ and $1 + -1 = 0$. Below these is the text "Pengali ratusan" with an arrow pointing to the hundreds place in the subtraction. At the bottom, there is a formula: $2332 = (1001) \cdot 2 + (100) \cdot 3$.

Gambar 5. Respon S2 dalam menggunakan pola untuk menyelesaikan masalah pola bilangan

Berdasarkan respon subjek S2 seperti yang dicantumkan pada gambar di atas menunjukkan subjek dapat mengidentifikasi pola atau aturan yang terdapat pada palindrom 4 angka yaitu selisih satu palindrom dengan palindrom lainnya adalah 110, selain itu selisih palindrom paling besar pada suatu ribuan dengan palindrom terkecil dengan palindrom berikutnya adalah 11. Dalam tahap ini S2 memberi dua contoh seperti palindrom 2112 dikurangi 2002 hasilnya sama dengan 110, dan palindrom 1221 dikurangi palindrom 1111 hasilnya sama dengan 11. Dengan pola yang dapat diidentifikasi ini S2 menyusun kalimat atau pernyataan matematika dari palindrom 2332 yang memiliki faktor 11.

Subjek S3 juga mencoba untuk mengidentifikasi pola dari bilangan palindrom 4 angka sehingga dapat ditunjukkan bahwa semua palindrom 4 angka dapat dibagi 11. Berikut pola yang dapat diidentifikasi oleh subjek S3 dalam menunjukkan bahwa semua palindrom 4 angka habis dibagi 11.

The image shows handwritten text and calculations. The text says: "Jika angka palindrom diurutkan kemudian dikurang itu akan menghasilkan 110, namun jika satuannya berganti, akan menghasilkan 11." Below this are two subtraction examples: $2112 - 2002 = 110$ and $1991 - 1881 = 110$. To the right, there is a formula: "rumus : $(1001) \cdot \text{ribuan} + (110) \cdot \text{ratusan}$ ". Below the formula, it says "akan membuktikan bisa dibagi 11".

Gambar 6. Respon S3 dalam mengidentifikasi pola menyelesaikan masalah palindrom 4 angka

Berdasarkan respon yang berikan subjek S3 pada gambar 6 di atas menunjukkan bahwa subjek S3 dapat mengidentifikasi salah satu pola dari palindrom 4 angka yaitu selisih dari satu palindrom ke palindrom selanjutnya adalah 110. Sedangkan untuk pola kelipatan dari 1001 tidak berhasil diidentifikasi. Berikut adalah kutipan interaksi Peneliti dengan S3 untuk menggali informasi tentang pola yang dapat diidentifikasi oleh subjek S3 dalam menyelesaikan masalah palindrom 4 angka.

- P : “Bagaimana pola yang dapat dilihat dari bilangan palindrom 4 angka?”
 S3 : “Selisih satu palindrom ke palindrom berikutnya 110!”
 P : “Lalu bagaimana selisih palindrom paling besar dari suatu ribuan ke palindrom paling kecil dari ribuan berikutnya?”
 S3 : “111 pak!”
 P : “...Coba diperiksa kembali, apa sudah benar hasilnya 111?”
 S3 : “O iya 11 pak hasilnya!”
 P : “Lalu bilangan 1001 ini, polanya dari mana?”
 S3 : “Tidak tahu pak!”
 P : “Bagaimana hubungan palindrom terkecil dengan palindrom terkecil pada ribuan selanjutnya?”
 S3 : “Tidak tahu pak!”

Berdasarkan respon yang diberikan dan kutipan hasil wawancara di atas menunjukkan subjek S3 belum dapat mengidentifikasi semua pola yang diperlu untuk dapat menunjukkan bahwa semua palindrom 4 angka habis dibagi 11. Hal ini menunjukkan subjek S3 belum dapat menyelesaikan masalah palindrom yang diberikan, sehingga dapat dikategorikan bagian dari kelompok siswa yang belum dapat menyelesaikan masalah.

Membuat dan menggunakan model matematika

Setelah dapat mengidentifikasi pola atau aturan yang berlaku pada palindrom 4 angka, selanjutnya subjek S1 menyusun suatu model matematika atau pernyataan matematika yang dapat dapat digunakan menunjukkan semua palindrom 4 angka habis dibagi 11. Model matematika sering dipakai sebagai strategi untuk menyelesaikan masalah STEM (English, 2023). Seperti dicatat dalam beberapa publikasi, interdisipliner sifat pemodelan matematika membuatnya ideal untuk pemecahan masalah berbasis STEM (English, 2016; Maass, et al., 2019). Banyak definisi model dan pemodelan ada dalam literatur (misalnya, Brady et al., 2015; Muthukaruppan et al., 2013). Untuk artikel ini, pemodelan melibatkan pengembangan inovasi konseptual dalam menanggapi kebutuhan untuk menunjukkan palindrom 4 angka dalam habis dibagi 11. Pemodelan yang efektif membutuhkan bergerak melampaui cara berpikir konvensional yang diterapkan dalam masalah sekolah yang khas (Lesh, et al., 2013) untuk memasukkan analisis kontekstual dan kritis. Berikut model matematika dapat disusun dan digunakan subjek S1 dalam menunjukkan bahwa palindrom 4 angka dapat ditunjukkan habis dibagi 11.

Untuk membuktikan bahwa angka palindrom bisa dibagi 11 adalah dgn menggunakan rumus

$$\begin{aligned} & \text{angka ribuan} \\ & \text{angka ratusan} \\ & \text{angka puluhan} \\ & \text{angka satuan} \\ & (1001)n + (110)a \\ & = 11(91.n) + 11(10.a) \\ & = 11(91.n + 10.a) \end{aligned}$$

hasil dr perkalian tsb sama dgn angka palindrom (naaa)

Gambar 7. Pendekatan memodelkan matematika S1 dalam menyelesaikan masalah pola bilangan

Berdasarkan respon yang dicantumkan pada gambar di atas menunjukkan bahwa subjek S1 menyelesaikan masalah pola bilangan dengan menggunakan model matematika berdasarkan pola yang dapat diidentifikasi pada palindrom 4 angka. Berikut adalah kutipan wawancara dengan S1 untuk menggali informasi tentang strategi penyelesaian masalah dengan membuat model matematika yang digunakan untuk menyelesaikan masalah palindrom 4 angka.

- P : “Bagaimana model matematika ini dapat disusun?”
 S1 : “Model matematika dapat disusun dari contoh palindrom 2332 dapat disusun menjadi $2002 + 330$ disusun menjadi $(1001)2 + (110)3$ ”
 P : “...Lalu apa makna $11((91.n) + (10.a))$?”
 S1 : “Karena palindrom naan dapat ditunjukkan merupakan kelipatan 11, sehingga semua palindrom 4 angka dapat dibagi 11 pak!”

Berdasarkan respon yang diberikan dan kutipan hasil wawancara di atas menunjukkan subjek S1 dapat menyelesaikan masalah palindrom 4 angka dengan menggunakan alasan deduktif dalam bentuk aljabar. Hal ini dapat dilakukan subjek S1 secara unik atau kreatif, sehingga dapat dikategorikan bagian dari kelompok siswa *critical reflection*.

Menyelesaikan dengan menggunakan masalah yang mirip

Pendekatan menyelesaikan dengan menggunakan masalah yang mirip digunakan salah satu subjek S2 dalam mengidentifikasi strategi penyelesaian masalah palindrom 4 angka. Hal ini dilakukan subjek S2 dengan menggunakan konsep nilai tempat sehingga dapat ditunjukkan suatu palindrom 4 angka habis dibagi 11. Menggunakan masalah yang mirip merupakan salah satu strategi atau pendekatan yang dapat digunakan siswa dalam menyelesaikan masalah (Herman, 2000; NCTM 2000; Polya, 1985). S2 dapat memberikan bukti aritmetika dalam menyelesaikan masalah palindrom 4 angka dengan bantuan *scaffolding* dari peneliti. S2 dapat menunjukkan semua palindrom 4 angka habis dibagi 11 dengan menggunakan nilai tempat dari suatu palindrom 4 angka. Berikut respon subjek S1 dalam memberikan bukti dalam menyelesaikan masalah pola bilangan.

$$\begin{aligned}
 2332 &= (1000)2 + (100)3 + (10)3 + (1)2 \\
 &= (1001)2 + (110)3 \\
 &= (11.91)2 + (11.10)3 \\
 &= 11(91.2) + 11(10)3 \\
 &= 11(91.2) + 30 \\
 &= 11(180 + 30)
 \end{aligned}$$

Gambar 8. Respon S2 dalam menggunakan masalah yang mirip dengan konsep nilai tempat

Berdasarkan respon yang diberikan S2 pada gambar 8 di atas, menunjukkan bahwa S2 menjawab pertanyaan dari masalah palindrom 4 angka ini dengan menggunakan argumen induktif dalam bentuk aritmetik yaitu dengan menunjukkan semua palindrom habis dibagi 11 dengan menggunakan nilai tempat dari suatu palindrom 4 angka. Adapun solusi ini dapat dilakukan S2 dengan bantuan *scaffolding* dari peneliti.

Berikut adalah kutipan interaksi peneliti dengan S2 saat memberikan *scaffolding* dalam menyelesaikan masalah non rutin palindrom 4 angka.

- P : “Bisa dijelaskan nilai dari masing-masing posisi angka dari palindrom 2332?”
 S2 : “posisi angka 2 yang pertama bernilai ribuan, posisi angka pertama 3 bernilai ratusan dan 3 kedua bernilai puluhan, sedangkan posisi 2 yang kedua bernilai satuan”
 P : “Iya benar... Bisa dituliskan kalau dijabarkan seperti apa?”
 S2 : Mencoba menjabarkan palindrom 2332 menjadi $(1000)2 + (100)3 + (10)3 + (1)2$
 P : “Baik.. Sekarang bagaimana bentuknya kalau yang mempunyai bilangan perkalian yang sama digabungkan?”
 S2 : Mencoba menggabung menjadi $(1001)2 + (110)3$
 P : “Bisa dijabarkan angka 1001 dan 110 dalam bentuk perkalian dari 11?”

- S2 : Mencoba membagi angka 1001 dan 110 masing-masing dengan 11.
 P : Berdasarkan hasil yang diperoleh, apa kesimpulannya yang dapat diambil?"
 S2 : "Semua palindrom 4 angka dapat ditunjukkan memiliki faktor 11, ini menunjukkan bahwa semua palindrom 4 angka habis dibagi 11

Berdasarkan respon yang diberikan subjek S2 dan kutipan interaksi peneliti dengan subjek S2 dalam membantu menyelesaikan masalah bilangan palindrom 4 angka, menunjukkan subjek S2 dapat dikategorikan bagian dari kelompok siswa yang dapat menyelesaikan masalah non rutin dengan bantuan dari peneliti (*explicit reflection*).

Berikut ini rekapitulasi hasil analisis data penelitian menurut kategori kelompok subjek penelitian berdasarkan proses *reflective inquiry* yang dapat dilakukan siswa dalam menyelesaikan masalah non rutin pola bilangan.

Tabel 1. Rangkuman WoT berdasarkan kelompok siswa

No	Subjek Penelitian	Kategori Kelompok	Masalah Pola Bilangan
1	Subjek 1 (S1)	<i>Critical Reflection</i>	1. Mengidentifikasi kasus khusus dari yang masalah ditanyakan 2. Mengidentifikasi pola 3. Menggunakan Model Matematika
2	Subjek 2 (S2)	<i>Explicit Reflection</i>	1. Mengidentifikasi kasus khusus dari yang ditanyakan 2. Mengidentifikasi pola 3. Menggunakan masalah yang mirip
3	Subjek 3 (S3)	Belum dapat menyelesaikan masalah	Mengidentifikasi kasus khusus dari yang ditanyakan

Berdasarkan hasil analisis data menunjukkan bahwa subjek kategori *critical reflection* dapat menggunakan tiga strategi atau pendekatan untuk menyelesaikan masalah palindrom 4 angka yang diberikan. Pertama, menentukan contoh kasus khusus dari masalah yang ditanyakan; kedua mengidentifikasi pola atau aturan yang berlaku dari masalah yang ditanyakan; dan terakhir ketiga menyusun dan menggunakan model matematika. Hal ini sesuai dengan yang dikatakan Herman (2000) bahwa strategi menentukan contoh kasus khusus sering digunakan untuk memperjelas kemungkinan solusi yang akan diberikan. Sedangkan strategi mengidentifikasi pola atau aturan adalah salah satu strategi dalam menyelesaikan masalah matematika, dimana kita dapat mengamati informasi yang diberikan seperti gambar, angka, huruf, kata, warna, atau suara digunakan sebagai cara untuk menyusun kemungkinan strategi yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah yang diberikan. Terakhir ketiga digunakan strategi membentuk dan menggunakan model matematika untuk menyelesaikan masalah yang digunakan. Hal ini sesuai yang dikatakan English (2023) bahwa model matematika sering dipakai sebagai strategi untuk menyelesaikan masalah.

Sedangkan subjek kategori *explicit reflection* menggunakan tiga strategi atau pendekatan dalam menyelesaikan masalah palindrom 4 angka, yaitu pertama menentukan nilai atau contoh khusus dari yang ditanyakan; kedua mengidentifikasi pola atau aturan dari yang ditanyakan; dan ketiga menggunakan masalah yang mirip untuk menyelesaikan masalah yang diberikan. Hal ini seperti dikatakan Herman (2000) untuk menyelesaikan masalah yang sulit untuk diselesaikan karena di dalamnya terkandung permasalahan yang cukup kompleks misalnya menyangkut bilangan yang sangat besar, bilangan sangat kecil, atau berkaitan dengan pola yang cukup kompleks, dapat dilakukan dengan menggunakan analogi melalui penyelesaian masalah yang mirip atau masalah yang lebih mudah (Aiyub, 2023).

Sedangkan untuk kategori subjek yang tidak dapat menyelesaikan masalah hanya dapat mengidentifikasi nilai atau contoh kasus khusus dari solusi yang ditanyakan. Subjek kategori yang tidak dapat menyelesaikan masalah tidak dapat menentukan strategi yang dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa semua palindrom 4 habis dibagi 11, karena kesulitan dalam mengidentifikasi

pola yang diperlu dalam menyusun strategi penyelesaian. Hal ini sesuai dengan yang dikatakan Herman (2000) bahwa tanpa melalui latihan, sangat sulit bagi seseorang untuk menyadari bahwa dalam permasalahan yang dihadapinya terdapat pola yang bisa diungkap.

Temuan lain dalam penelitian ini *WoT* subjek *critical reflection* pada umumnya fleksibel dalam menggunakan simbol matematika, mereka cenderung menggunakan cara yang berbeda dengan yang digunakan guru; Mereka menggunakan petunjuk pada pertanyaan untuk memecahkan masalah, dan mereka jarang menggunakan rumus untuk menyelesaikan masalah, mereka tidak menggunakan contoh atau persepsi visual dalam menyelesaikan masalah, dan mereka cenderung mengikuti aturan deduksi atau menggunakan penyelesaian aljabar. Hasil ini sesuai dengan hasil penelitian Lee et al. (2011) telah memeriksa kemampuan anak-anak yang berkembang dalam memecahkan masalah aljabar terkait dengan kemahiran mereka dalam pola. Lee et al. (2011) mengatakan bahwa kemahiran pada pola memprediksi kemahiran aljabar. Kecakapan pada tugas-tugas pola pada gilirannya diprediksi akan memperbarui kapasitas anak.

Sedangkan *WoT* yang digunakan subjek kategori *explicit reflection* dalam penelitian ini dalam menyelesaikan masalah cenderung kurang leluasa dan lebih berfokus dengan strategi yang diajarkan guru, serta cenderung menggunakan contoh, atau aturan induktif atau penyelesaian aritmetik. Secara umum penelitian ini sejalan dengan temuan (Harel & Sowder, 1998; Lee et al., 2011) bahwa skema penyelesaian yang umum digunakan di kalangan siswa adalah skema otoritatif dan skema empiris yang penyelesaiannya bergantung pada contoh atau persepsi visual (Uyangör, 2019). Temuan ini juga sejalan hasil penelitian Lee et al. (2011) menunjukkan bahwa penalaran aljabar mungkin sulit jika anak memiliki kapasitas pembaruan dan fasilitas yang buruk dengan perhitungan atau kesulitan dalam mengenali dan menggeneralisasi aturan tentang pola.

Untuk mendukung siswa dari kategori *explicit reflection* dalam memberikan *WoT* secara aljabar, guru harus merancang pembelajaran yang memperluas konteks masalah dalam matematika agar siswa terbiasa menyelesaikan verifikasi aljabar secara simbolik. Tall (2008) menyatakan bahwa transisi ke aksiomatik formal dapat dibangun melalui pengalaman tentang perwujudan dan simbolisme. Kemudian pembelajaran harus memberikan kesempatan kepada siswa untuk menyelesaikan masalah dalam berbagai jenis pembuktian. Berbagai jenis masalah tersebut dapat memberikan pengalaman kepada siswa yang dapat digunakan sebagai media transisi berpikir. Untuk mendukung *WoT* siswa dari kategori yang tidak dapat menyelesaikan masalah, guru harus membiasakan siswa menyelesaikan masalah dengan cara mengidentifikasi pola dan dapat memperdiksi semua kesulitan siswa yang mungkin menjadi kendala siswa dan merumuskan kemungkinan *scaffolding* yang dapat membantu siswa dalam mengidentifikasi kemungkinan solusi menyelesaikan masalah baik secara aritmetik maupun aljabar atau simbolik.

KESIMPULAN

WoT siswa dalam menyelesaikan masalah pola bilangan non rutin ada empat strategi atau pendekatan yang digunakan siswa yaitu; pertama menentukan kasus khusus dari masalah yang ditanyakan; kedua menentukan pola atau aturan dari masalah yang diberikan; ketiga menggunakan model matematika; dan terakhir keempat menggunakan masalah yang mirip dari yang ditanyakan. Subjek *critical reflection* menggunakan tiga *WoT* yaitu menentukan kasus khusus, mengidentifikasi pola yang berlaku dari masalah yang diberikan, dan menggunakan model matematika. Subjek *explicit reflection* mengidentifikasi kasus khusus; mengidentifikasi pola; dan menggunakan masalah yang mirrib. Sedangkan siswa yang tidak dapat menyelesaikan masalah hanya dapat mengidentifikasi kasus khusus dari masalah yang ditanyakan.

Temuan lainnya terkait *WoT* subjek *critical reflection* lebih fleksibel dan cenderung menggunakan cara yang berbeda dengan yang digunakan guru (unik) dan cenderung menggunakan alasan aljabar. Sedangkan subjek *explicit reflection* kurang leluasa dalam mengidentifikasi strategi penyelesaian, dan cenderung menggunakan alasan induktif atau aritmetik. Untuk mendukung siswa dalam kemampuan pola dan berpikir secara aljabar guru harus membiasakan siswa menyelesaikan masalah matematis non rutin berbagai kontek dalam pembelajaran dengan menggunakan pola.

DAFTAR PUSTAKA

- Aiyub, A. (2023). *Proses berpikir matematis dan berpikir kritis siswa dalam menyelesaikan masalah matematis non rutin berdasarkan kerangka teori situasi didaktis*. Disertasi (S3). Universitas Pendidikan Indonesia.
- Aiyub, A., Suryadi, D., Fatimah, S., & Kusnandi, K. (2022). Investigation of the critical thinking process in solving non-routine mathematical problems. *European Online Journal of Natural and Social Sciences*, 11(4), 1212–1233.
- Brady, C., Lesh, R., & Sevis, S. (2015). Extending the reach of the models and modelling perspective: A course-sized research site. In G. A. Stillman et al. (Eds.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice* (pp. 55–66). Dordrecht: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_4
- Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics*. In R. S. and V. W. Nicola Balacheff, Mantin Cooper (Ed.), Kluwer Academic Publishers (Edited and). Kluwer Academic Publishers. <https://doi.org/10.1007/0-306-47211-2>
- Creswell, J. W. (2007). *Qualitative inquiry & research design: Choosing among five approaches* (Second Eds). Sage Publication, Inc.
- Eatough, V., & Smith, J. (2017). Interpretative phenomenological analysis. In: Willig, C. and Stainton-Rogers, W. (eds.) *Handbook of qualitative psychology*. Sage Publication Ltd.
- English, L. D. (2016). STEM education K-12: Perspectives on integration. *International Journal of STEM Education*, 3(1), 1–8. <https://doi.org/10.1186/s40594-016-0036-1>
- English, L. D. (2023). Ways of thinking in STEM-based problem solving. *ZDM - Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01474-7>
- Harel, G. (2008). What is mathematics? A pedagogical answer to a philosophical question. In B. Gold & R. A. Simons (Eds.), *Proof and Other Dilemmas: Mathematics and Philosophy*. United States of America: The Mathematical Association of America, Inc. <https://doi.org/10.5948/upo9781614445050.018>
- Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234–283). Providence, RI: American Mathematical Society. <https://doi.org/10.1090/cbmath/007/07>
- Herman, T. (2000). *Strategi pemecahan masalah (problem solving) dalam pembelajaran matematika*. In Makalah. Tidak Diterbitkan. <http://file.upi.edu/Direktori>
- Lee, K., Ng, S. F., Bull, R., Lee Pe, M., & Ho, R. H. M. (2011). Are patterns important? An investigation of the relationships between proficiencies in patterns, computation, executive functioning, and algebraic word problems. *Journal of Educational Psychology*, 103(2), 269–281. <https://doi.org/10.1037/a0023068>
- Lesh, R., Riggs, C., English, L., & Sevis, S. (2013). Problem solving in the primary school (K-2) Let us know how access to this document benefits you. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1–2), 35–60.
- Maass, K., Geiger, V., Romero Ariza, M., & Goos, M. (2019). The role of mathematics in interdisciplinary STEM education. *ZDM Mathematics Education*, 51(6), 869–884. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01100-5>
- Muthukaruppan, S., Eswari, A., & Rajendran, L. (2013). Mathematical modelling of a biofilm: The Adomian decomposition method. *Natural Science*, 05(04), 456–462. <https://doi.org/10.4236/ns.2013.54059>
- NCTM. (2000). *Principles standards and for school mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
- Polya, G. (1985). *How to solve it*. In Princeton University Press (Second Ed).
- Ricoeur, P. (1986). *Lectures on ideology and utopia*. New York: Columbia University Press. <https://archive.org/details/pdfy-oRPzWEh3nXrYxehT/page/n13/mode/2up>

-
- Suryadi, D. (2019a). *Landasan filosofis penelitian desain didaktis (DDR) [philosophical foundations of didactic design research (DDR)]*. Bandung: Gapura Press.
- Suryadi, D. (2019b). *Penelitian desain didaktis (DDR) dan implementasinya*. Bandung: Gapura Press.
- Tall, D. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 20(2), 5–24. <https://doi.org/10.1007/BF03217474>
- Uyangör, S. M. (2019). Investigation of the mathematical thinking processes of students in mathematics education supported with graph theory. *Universal Journal of Educational Research*, 7(1), 1–9. <https://doi.org/10.13189/ujer.2019.070101>